

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка

Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

ПРОГРАМА КУРСУ

«Функціональний аналіз»

Напрямок: прикладна математика/системний аналіз

Факультет: прикладна математика та інформатика

Форма навчання: денна

Витяг з навчального плану

Курс	Семестр	Кількість кредитів	Загальний обсяг (год.)	Всього аудит. (год.)	у тому числі (год.):			Самостійна робота (год.)	Контрольні (модульні) роботи (шт.)	Розрахунково-графічні роботи (шт.)	Курсові проекти (роботи), (шт.)	Залік (сем.)	Екзамен (сем.)
					Лекції	Лабораторні	Прак-тичні						
2	4	5/3	180/108	85/51	51/34	–	34/17	95/57	1	–	–	–	+

1. Анотація

Основний курс присвячений вивченню лінійних, нормованих, банахових просторів, просторів зі скалярним добутком, а також лінійних обмежених функціоналів та операторів. Значна увага приділяється умовам існування та способам одержання обернених та спряжених операторів. Проводиться аналіз у просторах лінійних обмежених операторів. Зосереджується увага на певних методах функціонального аналізу, які використовуються в обчислювальній математиці. Розглядається таке поняття як спряжений простір і у зв'язку з цим фундаментальна теорема Гана-Банаха про продовження лінійних обмежених

функціоналів, а також теорема Рісса про загальний вигляд лінійних обмежених функціоналів у гільбертовому просторі. Викладаються основні властивості невід'ємних, додатно визначених операторів та операторів ортогонального проектування, аналізується їх роль у побудові наближених схем розв'язання різних задач.

2. Зміст програми

2.1. Лінійні нормовані простори.

Тема 1. Лінійні простори. Предмет та методи функціонального аналізу. Лінійні простори. Приклади лінійних просторів. Поняття лінійного многовиду. Підпростори лінійних просторів. Опуклі множини в лінійних просторах. Ізоморфізм лінійних просторів. Необхідність запровадження нормованих просторів.

Тема 2. Лінійні нормовані простори. Нормовані простори. Елементи аналізу в нормованих просторах. Приклади нормованих просторів. Еквівалентність норм у скінченновимірних просторах. Поняття підпростору. Відстань між елементом та підпростором. Існування елемента найкращого наближення. Єдиність елемента найкращого наближення.

Тема 3. Простори зі скалярним добутком. Евклідові та унітарні простори. Норма, породжена скалярним добутком. Нерівність Шварца. Основні властивості скалярного добутку. Ортогональні та ортонормовані системи. Процес ортогоналізації Шмідта.

2.2. Повні нормовані простори.

Тема 4. Банахові простори. Фундаментальні послідовності та їх властивості. Означення банахова простору. Приклади банахових просторів. Основні критерії. Приклади нормованих просторів, які не є банаховими. Ряди в нормованих та банахових просторах. Простори зі зліченною базою. Сепарабельні простори.

Тема 5. Гільбертові простори. Означення гільбертового простору. Приклади гільбертових просторів. Питання побудови та єдиності елемента найкращого наближення в гільбертовому просторі. Ортогональні доповнення в гільбертовому просторі. Критерій щільності. Ряди Фур'є в гільбертовому просторі.

Тема 6. Поповнення нормованих просторів. Теорема про поповнення нормованого простору. Простори Лебега та Соболева. Ізоморфізм та вкладання нормованих та банахових просторів. Узагальнена похідна. Найпростіша теорема вкладання. Використання теорем вкладання для знаходження елемента найкращого наближення в просторі неперервних функцій.

2.3. Лінійні оператори.

Тема 7. Лінійні обмежені оператори. Загальне означення оператора. Суперпозиція операторів. Термінологічні застереження. Означення лінійного оператора. Неперервність, обмеженість, норма лінійного оператора. Еквівалентність понять неперервність та обмеженість для лінійних операторів. Формули для обчислення норми лінійного оператора. Приклади дослідження конкретних лінійних операторів.

Тема 8. Простори лінійних обмежених операторів. Побудова лінійного нормованого простору лінійних обмежених операторів, його повнота. Рівномірна та сильна збіжність послідовностей лінійних обмежених операторів. Практичні наслідки. Продовження операторів за неперервністю. Принцип рівномірної обмеженості.

Тема 9. Обернені оператори. Означення оберненого оператора. Умови існування обернених операторів. Неперервно оборотні оператори. Класична теорема Банаха про обернені оператори. Ліві та праві обернені оператори, їх зв'язок із розв'язністю операторних рівнянь. Існування операторів $(I - C)^{-1}$, $(A - C)^{-1}$.

2.4. Спряжені простори та спряжені оператори.

Тема 10. Спряжені простори. Лінійні обмежені функціонали. Спряжені простори. Теорема Гана-Банаха та її наслідки. Теорема Рісса про загальний вигляд лінійних обмежених функціоналів у гільбертовому просторі. Самоспряженість гільбертового простору.

Тема 11. Спряжені оператори. Загальне означення спряженого оператора. Означення спряженого оператора в гільбертовому просторі. Самоспряжені оператори, формула для норми. Приклади побудови спряжених операторів.

2.5. Деякі додаткові відомості з теорії операторів.

Тема 12. Додатні та додатно визначені оператори. Означення додатних та додатно визначених лінійних операторів. Теореми про загальні властивості.

Тема 13. Оператори ортогонального проектування. Означення операторів ортогонального проектування, їх зв'язок із вирішенням задачі про ортогональний розклад довільного елемента в гільбертовому просторі. Теореми про загальні властивості. Роль у числовому аналізі.

Тема 14. Поняття коректності. Формулювання задач прикладної математики у вигляді операторних рівнянь. Поняття розв'язності операторного рівняння. Проблеми, пов'язані з некоректністю операторних рівнянь. Приклади некоректно поставлених задач.

Основна література

1. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
2. **Остудін Б.А., Шинкаренко Г.А.** Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці: Навчальний посібник. – Львів: Світ поліграфія, 1998. – 184 с.
3. **Вагін П.П., Остудін Б.А., Шинкаренко Г.А.** Основи функціонального аналізу: Курс лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – 140с.
4. **Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.** Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

Додаткова література

1. **Хатсон В., Пим Дж.** Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983. – 432 с.
2. **Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П.** Методы решения задач по функциональному анализу. – К.: Вища школа, 1990. – 479 с.
3. **Гаврилюк І.П., Макаров В.Л.** Методи обчислень. – К.: Вища школа, 1995. – 367 с.

Програму склав доцент Остудін Б.А.