МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Львівський національний університет імені Івана Франка

Кафедра математичного і функціонального аналізу

Програма курсу

«Математичний аналіз»

Напрями підготовки : інформатика

Факультет прикладної математики та інформатики

Форма навчання: денна

Курс	Семестр	Кредитів ECTS	Загальний обсяг (год.)	Всього аудит. (год.)	у тому числі (год.):			Самостійна робота (год.)	Контрольні (модульні) роботи (шт.)	Залік (сем)	Екзамен (сем.)
					Лекції	Лабораторні	Практичні				
1	1	6	214	108	54	54		108	3+колоквіум		+
1	2	6	202	102	51	51		100	3+колоквіум		+
2	3	4	144	72	36		36	72	3+колоквіум		+

АНОТАЦІЯ

Курс математичного аналізу є основним у фаховій підготовці не лише математиків, а й тих, хто використовує математику як прикладну. Математичний аналіз вивчає функціональні залежності і є тією частиною класичної математики, яка є основою практично для будь-якої математичної дисципліни. Метою цього курсу є оволодіння класичними методами математичного аналізу, теоретичними положеннями та основними застосуваннями математичного аналізу в різноманітних задачах математики, механіки та прикладної математики, їх використання в подальших курсах з математики та прикладної математики, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

Курс розрахований на три семестри. У першому семестрі розглядаються такі питання.

Теорія множин. Дійсні числа. Логічні символи. Множини, операції над множинами. Правила де Моргана. Декартів добуток множин. Загальне поняття відображення або функції. Образ та прообраз. Типи функцій. Означення оберненої функції та суперпозиції функції. Рівнопотужні множини. Злічені множини та їх властивості. Приклад незліченої множини. Множина потужності континуум. Аксіоми та основні властивості множини дійсних чисел. Точна верхня і точна нижня межі числової множини. Принцип точної верхньої межі. Найважливіші класи дійсних чисел. Принцип Архімеда та принцип вкладених відрізків.

Границя числової послідовності. Означення границі числової послідовності. Загальні властивості збіжних послідовностей. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Арифметичні дії над збіжними послідовностями. Невизначеності та їх типи. Теорема про існування границі монотонної послідовності. Число е. Підпослідовності. Часткові границі. Теорема Больцано-Вейєрштраса. Верхня і нижня границі послідовності. Фундаментальні послідовності та критерій Коші.

Неперервні функції. Неперервність функції в точці. Точки розриву та їх класифікація. Найпростіші властивості неперервних у точці функцій. Властивості функцій, неперервних на відрізках. Теорема Вейєрштрасса і теорема Больцано-Коші. Теорема про неперервність оберненої функції . Умова неперервності монотонних функцій. Неперервність основних елементарних функцій. Рівномірна неперервність функції та теорема Кантора.

Похідна і диференціал. Означення похідної. Приклади. Геометричний зміст похідної. Означення диференційовності функції в точці та диференціалу. Властивості диференційовної функції в точці. Інваріантність форми першого диференціалу. Диференціювання і арифметичні дії з функціями. Похідна оберненої функції. Похідна складеної та оберненої функції. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Похідні вищих порядків. Формула Лейбніца для n-ої похідної добутку двох функцій. Диференціали вищих порядків. Похідні заданої параметрично функції та похідні вищих порядків оберненої функції.

Основні теореми про диференційовні функції. Зростання та спадання функції в точці. Достатні умови зростання і спадання для диференційованої функції. Точки екстремуму. Теореми Ферма і Ролля, їх геометричний зміст. Теореми Лагранжа і Коші та їх геометричний зміст. Наслідки з теореми Лагранжа. Розкриття невизначеностей. Правила Лопіталя. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано і у формі Лагранжа. Формула Маклорена для основних функцій.

Дослідження функції з допомогою диференціального числення. Дослідження монотонності функції за допомогою похідних. Необхідні та достатні умови локального екстремуму. Опуклість функції. Точки перегину. Необхідні і достатні умови перегину функції. Асимптоти графіка функції. Дослідження функції та побудова її графіку.

У другому семестрі висвітлюються такі питання.

Невизначений інтеграл. Первісна та невизначений інтеграл. Означення та основні властивості. Таблиця невизначених інтегралів. Метод заміни змінної та метод інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. Інтегрування раціональних функцій. Розклад раціональних функцій на прості дроби. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод Остроградського. Інтегрування деяких функцій, що містять радикали. Інтегрування диференціального бінома, підстановки Чебишова.

Інтегрування квадратичних ірраціональностей за допомогою підстановок Ейлера. Інтегрування деяких тригонометричних функцій.

Визначений інтеграл. Означення визначеного інтеграла. Обмеженість інтегровної функції. Суми Дарбу: означення та властивості. Критерій інтегрованості обмеженої функції. Класи інтегровних функцій. Властивості інтеграла Рімана. Інтеграл по орієнтованому проміжку. Інтеграл, як функція верхньої границі інтегрування. Основна формула інтегрального числення (формула Ньютона-Лейбніца). Формула заміни змінної у визначеному інтегралі та формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Геометричні застосування визначеного інтеграла. Адитивна функція орієнтованого проміжку та інтеграл. Площа криволінійної трапеції та криволінійного сектора. Об'єм тіла обертання та площі поверхонь тіл обертання. Довжина шляху (дуги кривої).

Невластиві інтеграли. Означення та основні властивості невластивого інтеграла. Критерії та ознаки збіжності невластивих інтегралів. Абсолютна та умовна збіжність невластивих інтегралів. Невластиві інтеграли з декількома особливостями. Інтеграл у розумінні головного значення.

Числові ряди. Означення числового ряду. Приклади. Елементарні властивості збіжних рядів. Критерій Коші збіжності числового ряду. Необхідна умова збіжності. Ряди з невід'ємними членами. Критерій збіжності. Ознаки збіжності для рядів з невід'ємними членами. Ознаки збіжності рядів із членами різних знаків. Абсолютна збіжність. Ознаки Д'аламбера, Коші, Лейбніца, Діріхле та Абеля збіжності рядів. Властивості збіжних рядів. Теореми Діріхле та Рімана про перестановку абсолютно і умовно збіжного рядів. Теорема про добуток двох абсолютно збіжних рядів.

Функціональні послідовності і ряди. Поточкова і рівномірна збіжність функціональних послідовностей. Критерій Коші рівномірної збіжності. Рівномірна збіжність функціонального ряду. Ознаки Вейєрштрасса, Діріхле та Абеля рівномірної збіжності функціональних рядів. Властивості рівномірно збіжних функціональних послідовностей і рядів. Степеневі ряди. Радіус збіжності степеневого ряду. Теорема Коші-Адамара. Область рівномірної збіжності степеневого ряду. Властивості сум степеневих рядів. Розклад функцій в степеневі ряди. Ряд Тейлора. Тригонометричний ряд і ряд Фур'є. Теорема про розвинення функції в ряд Фур'є.

Функції багатьох змінних: неперервність та поняття про диференційованість. Означення метричного простору. Дійсний m-вимірний простір. Топологічні поняття в дійсному m-вимірному просторі. Відкриті, замкнені множини. Збіжні послідовності в дійсному m-вимірному просторі: означення та властивості. Функції на метричних просторах. Границя функції в точці. Подвійні та повторні границі. Неперервні функції на метричних просторах. Компактні множини в метричних просторах. Властивості неперервних функцій на компактних множинах. Рівномірна неперервність та теорема Кантора. Часткові похідні та повний диференціал функцій багатьох змінних. Похідні та диференціал складеної функції.

У третьому семестрі розглядаються такі питання.

Диференціювання функцій багатьох змінних. Похідні вищих порядків. Теорема про змішані похідні. Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора для функції багатьох змінних. Екстремуми функції багатьох змінних. Теорема про неявну функцію. Функціональні визначники (якобіани). Теорема про неявну вектор-функцію. Умовні екстремуми. Метод невизначених множників Лагранжа.

Кратні інтеграли. Площа плоскої фігури. Означення та умови існування подвійного інтеграла. Класи інтегровних функцій. Властивості подвійних інтегралів. Теорема про середнє значення. Зведення подвійного інтеграла до повторних. Заміна змінних. Потрійні та *n*-кратні інтеграли.

Криволінійні інтеграли. Криволінійний інтеграл першого роду. Теорема існування. Криволінійні інтеграли другого роду. Теорема існування. Формула Гріна. Незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.

Поверхневі інтеграли. Означення поверхні. Дотична площина і нормаль до поверхні. Площа поверхні. Кусково-гладкі поверхні. Поверхневі інтеграли першого та другого роду. Векторні та скалярні поля. Їхні характеристики. Формула Гаусса-Остроградського. Геометричне тлумачення дивергенції. Формула Стокса. Геометричне тлумачення ротора.

Інтеграли залежні від параметра. Рівномірна збіжність функції двох змінних до граничної функції. Властиві інтеграли, залежні від параметра. Невластиві інтеграли, залежні від параметра. Рівномірна збіжність інтегралів. Властивості невластивих інтегралів, залежних від параметра. Інтеграли Ейлера.

Основна література

1. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз, Київ: Знання, 2008.
2. Заболоцький М.В., Фединяк С.І., Філевич П.В., Червінка К.А. Практикум з математичного аналізу, Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009.

Додаткова література

1. Дороговцев А.Я., Математичний аналіз, Київ: Либідь, 1993.
2. Кудрявцев Л.Д., Математический анализ, М., 1988.
3. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, М.: Наука, 1969.
4. Демидович Б.П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М.: Наука, 1997.
5. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К., Математичний аналіз, Київ, 1992.