

Львівський національний університет імені Івана Франка

Кафедра інформаційних систем

ПРОГРАМА КУРСУ

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

(шифр і назва навчальної дисципліни)

напряму підготовки 6.040302 - інформатика

(шифр і назва напряму підготовки)

факультету прикладної математики та інформатики

Форма навчання	Курс	Семестр	Загальний обсяг (год.)	Всього аудит. (год.)	у тому числі (год.):			Самостійна робота (год.)	Контрольні (модульні) роботи (шт.)	Розрахунково-графічні роботи (шт.)	Курсові проекти (роботи), (шт.)	Залік (сем.)	Екзамен (сем.)
					Лекції	Лабораторні	Практичні						
Денна	4	7	108	42	28	14	66				7		
		8	144	56	28	28	88					8	

АНОТАЦІЯ

В курсі розглядаються основні підходи до побудови та аналізу числових методів апроксимації функцій багатьох змінних і рівнянь в частинних похідних, які складають теоретичний фундамент комп'ютерного моделювання в проблемах фізики, механіки суцільного середовища та охорони довкілля. На засадах функціонального аналізу, зокрема, методів гільбертових просторів будуються та аналізуються варіаційні формулювання для крайових задач та еволюційні варіаційні формулювання для початково-крайових задач математичної фізики з формулюванням рівнянь балансу енергії, маси і побудовою належних апіорних оцінок розв'язків варіаційних задач. Розглядаються класичні методи дискретизації та напівдискретизації варіаційних задач із використанням методу Гальоркіна і методу скінченних елементів. Викладаються способи побудови частинами визначених поліноміальних апроксимацій функцій декількох змінних та обчислювальних схем для апроксимації варіаційних задач. Будуються однокрокові рекурентні схеми інтегрування за часом напівдискретизованих задач з використанням процедури Петрова-Гальоркіна та досліджується їх стійкість, апроксимативність та збіжність.

На практичних заняттях розглядаються розробка інструментарію, аспекти програмної реалізації числових схем, виконання обчислювального експерименту, обробка та аналіз його даних.

Програма навчальної дисципліни

Частина 1 (7 семестр). Розв'язування крайових задач за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ)

1. Вступ до курсу

Тема 1.1. Огляд розвитку числових методів математичної фізики та сфера їх застосувань. Наукові школи та досягнення вчених факультету.

Тема 1.2. Схема МСЕ на прикладі одновимірної задачі Діріхле для рівняння $-d^2u(x)/dx^2=f(x)$.

2. Проекційно-сіткові методи розв'язування варіаційних задач

Тема 2.1. Класичні варіаційні задачі: задача про найкраще наближення. Основна теорема гільбертових просторів. Задача мінімізації квадратичного функціоналу. Задача про варіаційне рівняння. Теорема про ортогональну проекцію. Задача про варіаційну нерівність.

Тема 2.2. Простір лінійних обмежених операторів. Спряжений простір. Теорема Рісса. Білінійні форми. Основні означення та властивості. Теорема про структуру обмеженої білінійної форми. V-еліптичні білінійні форми.

Тема 2.3. Абстрактна задача про варіаційне рівняння. Основна ідея проекційних методів. Метод Гальоркіна. Теорема Лакса-Мільграма-Вишика. Абстрактна задача мінімізації квадратичного функціоналу. Теорема Міхліна про мінімум квадратичного функціоналу.

3. Крайові задачі та їх варіаційні формулювання

Тема 3.1. Загальне формулювання крайових задач для еліптичних рівнянь другого порядку. Крайова задача Діріхле для рівняння Гельмгольца, варіаційне формулювання та доведення його коректності.

Тема 3.2. Варіаційне формулювання крайової задачі Діріхле для рівняння Пуассона та його коректність. Варіаційне формулювання крайової задачі Неймана для рівняння Гельмгольца та його коректність.

4. Класичні методи дискретизації

Тема 4.1. Теорема Лакса. Метод Гальоркіна. Теорема про властивості схеми Гальоркіна. Теорема про збіжність схеми Гальоркіна.

Тема 4.2. Абстрактна схема Рітца та її алгебричне подання. Теорема про властивості схеми Рітца.

5. Апроксимації МСЕ

Тема 5.1. Простори апроксимацій МСЕ. Декомпозиція та триангуляція області. Побудова інтерполяційних поліномів n-го порядку на трикутниках. Баріцентричні координати на трикутнику та їх властивості. Лема про інтерполяційний базис в $P_1(K)$.

Тема 5.2. Теорема про оцінку в просторі $C(K)$ похибки інтерполювання на трикутнику елементами з $P_1(K)$. Теорема про оцінку в просторі $H^m(K)$ похибки інтерполювання на трикутнику елементами з $P_1(K)$.

Тема 5.3. Лема про інтерполяційний базис в $P_2(K)$. Квадратичний інтерполяційний поліном Лагранжа на трикутнику. Лема про інтерполяційний базис в $P_3(K)$. Кубічний інтерполяційний поліном Лагранжа на трикутнику.

Тема 5.4. Лема про інтерполяційний базис Ерміта-Зламала в $P_3(K)$. Теорема про єдиність полінома Ерміта-Зламала. Априорні оцінки похибки інтерполювання на трикутнику.

Тема 5.5. Простори частинами лінійних та частинами квадратичних інтерполяційних поліномів. Теорема про ознаку функції з $H^1(\Omega)$. Апроксимації на тетраедрах. Лагранжеві

апроксимації n -го порядку на прямокутниках. Апроксимації на криволінійних чотирикутниках.

Рекомендована література

1. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. -Москва: Наука, 1981. -416 с.
2. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. -Москва: Наука, 1970. -454 с.
3. *Остудін Б.А., Шинкаренко Г.А.* Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці. -Львів: Світ поліграфії, 1998. -200 с.
4. *Савула Я.Г.* Метод скінченних елементів. -Київ: НМКВО, 1993. -98 с.
5. *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: ЛНУ ім.І.Франка, 2004. -221с.
6. *Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А.* Метод скінченних елементів. - Львів: Вища школа, 1976. - 80 с.
7. *Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н.* Некоторые приложения метода конечных элементов. -Львів: Вища школа, 1981. - 86 с.
8. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов.-Москва: Мир, 1979. -392 с.
9. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. - Москва: Мир, 1977. -350 с.
10. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. - Москва: Мир, 1980. - 512 с.
11. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові схеми розв'язування початково-крайових задач. - Київ: НМКВО, 1991. -88 с.

Частина 2 (8 семестр). Числові методи розв'язування початково-крайових задач

1. Проектування числових схем для параболічних задач

Тема 1.1. *Початково-крайова задача для параболічних рівнянь та відповідна їй варіаційна задача. Задачі теплопровідності та дифузії-адвекції-реакції.*

Тема 1.2. *Напівдискретизація Гальоркіна за просторовими змінними. Базиси МСЕ для просторів апроксимацій Структура напівдискретної задачі. Алгоритми обчислення коефіцієнтів результуючої задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.*

Тема 1.3. *Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі напівдискретної задачі. Кусково лінійні апроксимації її розв'язку. Процедура Петрова-Гальоркіна і параметри схеми.*

Тема 1.4. *Обчислювальні аспекти програмної реалізації проекційно сіткових схем.*

2. Проектування числових схем для гіперболічних задач

Тема 2.1. *Початково-крайова задача для гіперболічних рівнянь та відповідна їй варіаційна задача. Система рівнянь динаміки в'язкопружного тіла з миттєвою пам'яттю.*

Тема 2.2. *Напівдискретизація Гальоркіна за просторовими змінними. Базиси МСЕ для просторів апроксимацій Структура напівдискретної задачі. Алгоритми обчислення коефіцієнтів результуючої задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.*

Тема 2.3. *Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі напівдискретної задачі. Схема Ньюмарка-Вільсона. Кусково квадратичні апроксимації Ерміта її розв'язку. Процедура Петрова-Гальоркіна і параметри схеми.*

Тема 2.4. *Обчислювальні аспекти програмної реалізації проекційно сіткових схем.*

3. Аналіз числових схем для параболічних задач

Тема 3.1. *Побудова варіаційної задачі, що відповідає початково-крайовій задачі для параболічного рівняння. Простір допустимих функцій. Класифікація крайових умов. Варіаційне трактування початкових умов. Характеризація білінійних та лінійних функціоналів. Енергетичні норми.*

Тема 3.2. *Рівняння балансу енергії. Енергія температурного поля, дисипація енергії, потужність джерел тепла. Енергетична та дисипативна норми. Побудова апіорних оцінок для норм розв'язку. Умови стійкості (стабільності, неперервної залежності) та регулярності розв'язку. Єдиність розв'язку еволюційної варіаційної задачі. Коректність еволюційної варіаційної задачі.*

Тема 3.3. *Аналіз збіжності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна. Простори апроксимацій методу скінченних елементів. Побудова апіорних оцінок похибок та оцінок швидкості збіжності напівдискретних апроксимацій.*

Тема 3.4. *Аналіз збіжності однокрокових рекурентних схем інтегрування в часі. Побудова ОРС з використанням кусково лінійних апроксимацій її розв'язку та зважування лишків. Однопараметричне сімейство ОРС: схеми Ейлера, Кранка-Ніколсона і Гальоркіна. Рівняння енергетичного балансу цілком дискретної задачі та апіорні оцінки енергетичних норм. Безумовна та умовна стійкість ОРС. Апіорні оцінки похибок дискретизації в часі та швидкість їх збіжності.*

4. Аналіз числових схем для гіперболічних задач

Тема 4.1. *Побудова варіаційної задачі, що відповідає початково-крайовій задачі для гіперболічного рівняння. Простір допустимих функцій. Класифікація крайових умов. Варіаційне трактування початкових умов. Характеризація білінійних та лінійних функціоналів.*

Тема 4.2. Рівняння балансу енергії. Потенціальна та кінетична енергії, дисипація енергії, потужність джерел розподілених і поверхневих навантажень. Енергетичні та дисипативна норми. Побудова апріорних оцінок для норм розв'язку. Умови стійкості (стабільності, неперервної залежності) та регулярності розв'язку. Єдиність розв'язку еволюційної варіаційної задачі. Коректність еволюційної варіаційної задачі.

Тема 4.3. Аналіз збіжності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна. Простори апроксимацій методу скінченних елементів. Побудова апріорних оцінок похибок та оцінок швидкості збіжності напівдискретних апроксимацій.

Тема 4.4. Аналіз збіжності однокрокових рекурентних схем інтегрування в часі. Побудова ОРС з використанням кусково квадратичних апроксимацій розв'язку та зважування лишків. Двопараметричне сімейство ОРС. Рівняння енергетичного балансу цілком дискретизованої задачі та апріорні оцінки енергетичних норм. Безумовна та умовна стійкість ОРС. Варіаційне рівняння для похибок дискретизації в часі, апріорні оцінки та швидкість збіжності ОРС.

Рекомендована література

1. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові схеми розв'язування початково-крайових задач. – Київ, НМКВО, 1991.
2. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004.
3. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. - Berlin:Springer, 2001.
4. Grossmann Ch., Roos H.-G., Stynes M. Numerical Treatment of Partial Differential Equations. - Berlin:Springer, 2007.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.-М.: Наука, 1987.