

---

## ПЕРЕДМОВА

*Дослідження операцій* (ДО) акумулює математичні методи, які використовують для прийняття керівних рішень у різних сферах людської діяльності. Керування будь-якою системою реалізується як процес, підпорядкований певним законам. Знання цих законів допомагає визначити умови, необхідні та достатні для здійснення такого процесу. Отож *метою* дослідження операцій є кількісне обґрунтування керівних рішень.

*Предметом* дослідження операцій, здебільшого, є задачі на знаходження екстремумів однієї чи декількох функцій за певних умов. *Об'єктами* ДО є різні сфери людської діяльності, де необхідно здійснювати вибір найкращого з можливих варіантів дій.

Частина 1 підручника ("Лінійні моделі") складається з чотирьох розділів. У *першому розділі* визначено предмет та об'єкти ДО, сфери та особливості застосування методів ДО, наведено класифікацію задач ДО.

У *другому розділі* розглянуто моделі лінійного програмування (ЛП) – постановку і приклади типових задач, теоретичні основи ЛП, теорію двоїстості, симплексний та двоїстий симплексний методи розв'язування задач ЛП, метод штучного базису знаходження опорного розв'язку задач ЛП.

У *третьому розділі* розглянуто моделі цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) – постановку і приклади типових задач, загальну методику розв'язування задач ЦЛП, теоретичні основи та алгоритми реалізації методу Гоморі та методу гілок і меж, застосування методу гілок і меж до розв'язування задачі комівояжера.

Важливим частковим випадком задачі ЛП є транспортна задача (ТЗ), якій присвячено *четвертий розділ* підручника. Специфіка цієї задачі дає змогу застосовувати спеціальні методи відшукування оптимального розв'язку, простіші за симплексний метод. Конкретний зміст таких задач може стосуватися різноманітних проблем, які не зв'язані з перевезенням вантажів.

У кожному розділі підручника наведено приклади, а також список запитань для самоперевірки і низку задач для самостійної роботи студентів.

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка

**М. Я. Бартіш, І. М. Дудзяний**

# **Дослідження операцій**

**Частина 1. Лінійні моделі**

Підручник



Львів  
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка  
2007

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка

**М. Я. Бартіш, І. М. Дудзяний**

## **Дослідження операцій**

### **Частина 1. Лінійні моделі**

Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як підручник  
для студентів вищих навчальних закладів

Львів  
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка  
2007

**УДК 519.8**  
**Б 26**  
**ББК 22.183**

**Рецензенти:**

д-р фіз.-мат. наук, проф. *В.А. Кривень*  
(Тернопільський державний технологічний університет імені Івана Пулюя)  
д-р фіз.-мат. наук, проф. *І.В. Огірко*  
(Українська академія друкарства, м. Львів)  
д-р фіз.-мат. наук, проф. *Р.В. Слоньовський*  
(Національний університет “Львівська політехніка”)

*Рекомендовано до друку Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів вищих навчальних закладів  
(лист заступника Міністра В.О. Огнев'юка  
за № 14/18-Г-609 від 01.08.06 р.)*

**Бартіш М. Я., Дудзяний І. М.**

**Б 26** Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі: Підручник. –  
Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 168 с.

ISBN

ISBN Ч. 1

Дослідження операцій (ДО) акумулює математичні методи, які використовують для прийняття керівних рішень у різних сферах людської діяльності. У підручнику визначається предмет та об'єкти ДО, сфери та особливості застосування методів ДО, наводиться класифікація задач ДО.

У підручнику висвітлені теоретичні основи лінійного програмування (ЛП), симплексний та двоїтий симплексний методи розв'язування задач ЛП, метод штучного базису знаходження опорного розв'язку задач ЛП. Детально розглянута теорія двоїстості у лінійному програмуванні та її економічний зміст. Розглянуто транспортну задачу ЛП, а також задачу цілочисельного лінійного програмування.

Зміст підручника відповідає програмі обов'язкового курсу “Дослідження операцій” для базового напрямку “Прикладна математика”. Розрахований на бакалаврів, спеціалістів і магістрів. Ним можуть скористатися аспіранти та викладачі ВЗО, де викладаються предмети “Дослідження операцій”, “Математичне програмування”, “Математичні методи в економіці” тощо.

**УДК 519.8**  
**ББК 22.183**

ISBN

ISBN Ч.1

© Бартіш М. Я., Дудзяний І. М., 2007

© Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007

## ЗМІСТ

	<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	5
	<b>СПИСОК СКОРОЧЕНЬ І ПОЗНАЧЕНЬ</b> .....	6
<b>1.</b>	<b>ВСТУП У ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ</b> .....	7
	1.1. Планування ціленаправлених дій та ухвалення рішень ..	7
	1.2. Людський чинник у процесі ухвалення рішень .....	9
	1.3. Задачі ухвалення рішень .....	10
	1.3.1. Постановка задачі ухвалення рішення .....	10
	1.3.2. Теорія ухвалення рішень і ДО .....	14
	1.3.3. Логістика і дослідження операцій .....	18
	1.4. Головні етапи та принципи операційних досліджень .....	20
	1.5. Приклади математичних моделей задач ДО .....	23
	1.6. Основи математичного моделювання задач ДО .....	27
	1.7. Класифікація задач ДО .....	31
	1.8. Математичні методи дослідження операцій .....	34
	Запитання для самоперевірки .....	36
	Завдання для самостійної роботи .....	37
<b>2.</b>	<b>ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ</b> .....	41
	2.1. Форми запису задачі лінійного програмування .....	41
	2.2. Властивості багатограничних множин .....	46
	2.3. Графічна інтерпретація ЗЛП .....	50
	2.4. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування ..	54
	2.5. Симплексний метод розв'язування задачі ЛП .....	60
	2.6. Алгоритм симплексного методу .....	65
	2.7. Визначення опорних планів .....	75
	2.8. Двоїстість у лінійному програмуванні .....	85
	2.9. Двоїстий симплексний метод розв'язування задачі ЛП ..	95
	Запитання для самоперевірки .....	98
	Завдання для самостійної роботи .....	99

<b>3.</b>	<b>ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ .</b>	<b>103</b>
3.1.	Постановка задачі .....	103
3.2.	Методи розв'язування задач цілочисельного лінійного програмування .....	105
3.3.	Метод Гоморі розв'язування задач ЦЛП .....	107
3.4.	Метод гілок і меж розв'язування задач ЦЛП .....	111
3.5.	Задача комівояжера .....	116
3.6.	Метод гілок і меж розв'язування задачі комівояжера ....	118
	Запитання для самоперевірки .....	128
	Завдання для самостійної роботи .....	129
<b>4.</b>	<b>ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА .....</b>	<b>131</b>
4.1.	Постановка транспортної задачі .....	131
4.2.	Властивості закритої транспортної задачі .....	133
4.3.	Властивості опорних планів транспортної задачі .....	136
4.4.	Алгоритми побудови опорних планів транспортної задачі .....	143
	4.4.1. Побудова опорного плану ТЗ методом північно-західного кута .....	143
	4.4.2. Побудова опорного плану ТЗ методом мінімального елемента .....	146
	4.4.3. Побудова опорного плану ТЗ методом Фогеля ..	147
4.5.	Критерій оптимальності плану перевезень .....	148
4.6.	Алгоритм методу потенціалів .....	149
4.7.	Приклади задач, які зводяться до транспортної задачі ...	155
	4.7.1. Задача про розподіл площ під посіви сільськогосподарських культур .....	155
	4.7.2. Задача оптимізації сезонних запасів .....	157
4.8.	Задача про призначення .....	158
4.9.	Транспортна задача за критерієм часу .....	162
	Запитання для самоперевірки .....	165
	Завдання для самостійної роботи .....	165
	<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....</b>	<b>167</b>

---

## ПЕРЕДМОВА

*Дослідження операцій* (ДО) акумулює математичні методи, які використовують для прийняття керівних рішень у різних сферах людської діяльності. Керування будь-якою системою реалізується як процес, підпорядкований певним законам. Знання цих законів допомагає визначити умови, необхідні та достатні для здійснення такого процесу. Отож *метою* дослідження операцій є кількісне обґрунтування керівних рішень.

*Предметом* дослідження операцій, здебільшого, є задачі на знаходження екстремумів однієї чи декількох функцій за певних умов. *Об'єктами* ДО є різні сфери людської діяльності, де необхідно здійснювати вибір найкращого з можливих варіантів дій.

Частина 1 підручника ("Лінійні моделі") складається з чотирьох розділів. У *першому розділі* визначено предмет та об'єкти ДО, сфери та особливості застосування методів ДО, наведено класифікацію задач ДО.

У *другому розділі* розглянуто моделі лінійного програмування (ЛП) – постановку і приклади типових задач, теоретичні основи ЛП, теорію двоїстості, симплексний та двоїстий симплексний методи розв'язування задач ЛП, метод штучного базису знаходження опорного розв'язку задач ЛП.

У *третьому розділі* розглянуто моделі цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) – постановку і приклади типових задач, загальну методику розв'язування задач ЦЛП, теоретичні основи та алгоритми реалізації методу Гоморі та методу гілок і меж, застосування методу гілок і меж до розв'язування задачі комівояжера.

Важливим частковим випадком задачі ЛП є транспортна задача (ТЗ), якій присвячено *четвертий розділ* підручника. Специфіка цієї задачі дає змогу застосовувати спеціальні методи відшукування оптимального розв'язку, простіші за симплексний метод. Конкретний зміст таких задач може стосуватися різноманітних проблем, які не зв'язані з перевезенням вантажів.

У кожному розділі підручника наведено приклади, а також список запитань для самоперевірки і низку задач для самостійної роботи студентів.

Підручник “Дослідження операцій” увібрав багаторічний досвід викладання цієї дисципліни на факультеті прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Зміст підручника відповідає програмі обов’язкового курсу ”Дослідження операцій” для базового напрямку ”Прикладна математика”. Розрахований на бакалаврів, спеціалістів і магістрів. Ним можуть скористатися аспіранти та викладачі ВЗО, де викладаються предмети ”Дослідження операцій”, ”Математичне програмування”, ”Математичні методи в економіці” тощо.

## СПИСОК СКОРОЧЕНЬ І ПОЗНАЧЕНЬ

*ДО* – дослідження операцій

*ЗЛП* – задача лінійного програмування

*ЗУР* – задача ухвалення рішень

*ЛМП* – людино-машинна процедура

*ЛП* – лінійне програмування

*МВ* – модель вибору

*МЗ* – метод заокруглення

*ОДР* – область допустимих розв’язків

*ОП* – опорний план

*ОУР* – особа, яка ухвалює рішення

*ПКМ* – планування і керування у мережах

*УР* – ухвалення рішень

*СМО* – система масового обслуговування

*СОК* – система організаційного керування

*ТЗ* – транспортна задача

*ЦЛП* – цілочисельне лінійне програмування

➤ – початок доведення теореми/розв’язування прикладу

◀ – закінчення доведення теореми/розв’язування прикладу

$\alpha \Rightarrow \beta$  – з твердження  $\alpha$  випливає твердження  $\beta$  (якщо  $\alpha$ , то  $\beta$ )

$\alpha \Leftrightarrow \beta$  – твердження  $\alpha$  рівносильне твердженню  $\beta$  ( $\alpha$  тоді і лише тоді, коли  $\beta$ )

$a := b$  – присвоєння значень (змінна  $a$  отримує значення змінної  $b$ )